**Mieczysław Połoński**
**Zakład Technologii i Organizacji Robót Inżynieryjnych**
**Wydział Inżynierii i Kształtowania Środowiska SGGW**

# Zagadnienia transportowe

Z m punktów odprawy ma być wysłany jednorodny produkt odpowiednio w ilościach $a_1$, $a_2,\dots,a_m$ i dostarczony do n punktów odbioru odpowiednio w ilościach $b_1$, $b_2,\dots,b_n$. Koszt transportu jednostki z i-tego punktu odprawy do j-tego punktu odbioru wynosi $c_{i,j}$ i jest znany dla wszystkich kombinacji (i,j). Trzeba wyznaczyć ilości $x_{i,j}$ produktu, które należy przewieźć do wszystkich (i,j) tak, aby zminimalizować całkowity koszt transportu.

Zadanie można zdefiniować następująco:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} * c_{ij} \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1\dots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1\dots n$$

$$x_{ij} \geq 0 \;; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$a_i \geq 0 \;; \qquad b_j \geq 0$$

# Algorytm transportowy

1. Wybierz $m+n-1$ tras i znajdź odpowiednie początkowe bazowe rozwiązanie dopuszczalne
2. Sprawdź, czy wprowadzenie zmiennej niebazowej do zbioru zmiennych bazowych tego rozwiązania polepszy wartość funkcji celu. Jeśli tak, idź do kroku 3, w przeciwnym razie stop.
3. Wyznacz zmienną bazową na miejsce której wprowadzisz do zbioru zmiennych bazowych zmienną określoną w kroku 2.
4. Oblicz wielkości przepływów na tych tras, które odpowiadają zmiennym bazowym kolejnego bazowego rozwiązania dopuszczalnego. Wróć do kroku 2.

**Sprowadzenie zadania dowolnego do zadania, w którym $\Sigma a_i = \Sigma b_j$**

W przypadku, gdy $\Sigma a_i \neq \Sigma b_j$ wprowadzamy fikcyjny punkt podaży (gdy $\Sigma a_i < \Sigma b_j$) lub fikcyjny punkt popytu (gdy $\Sigma a_i > \Sigma b_j$). Wartości podaży lub popytu równa się $\Sigma a_i - \Sigma b_j$ (lub odwrotnie). Koszty przewozu jednostkowego na nowo wprowadzonych trasach równają się zeru.

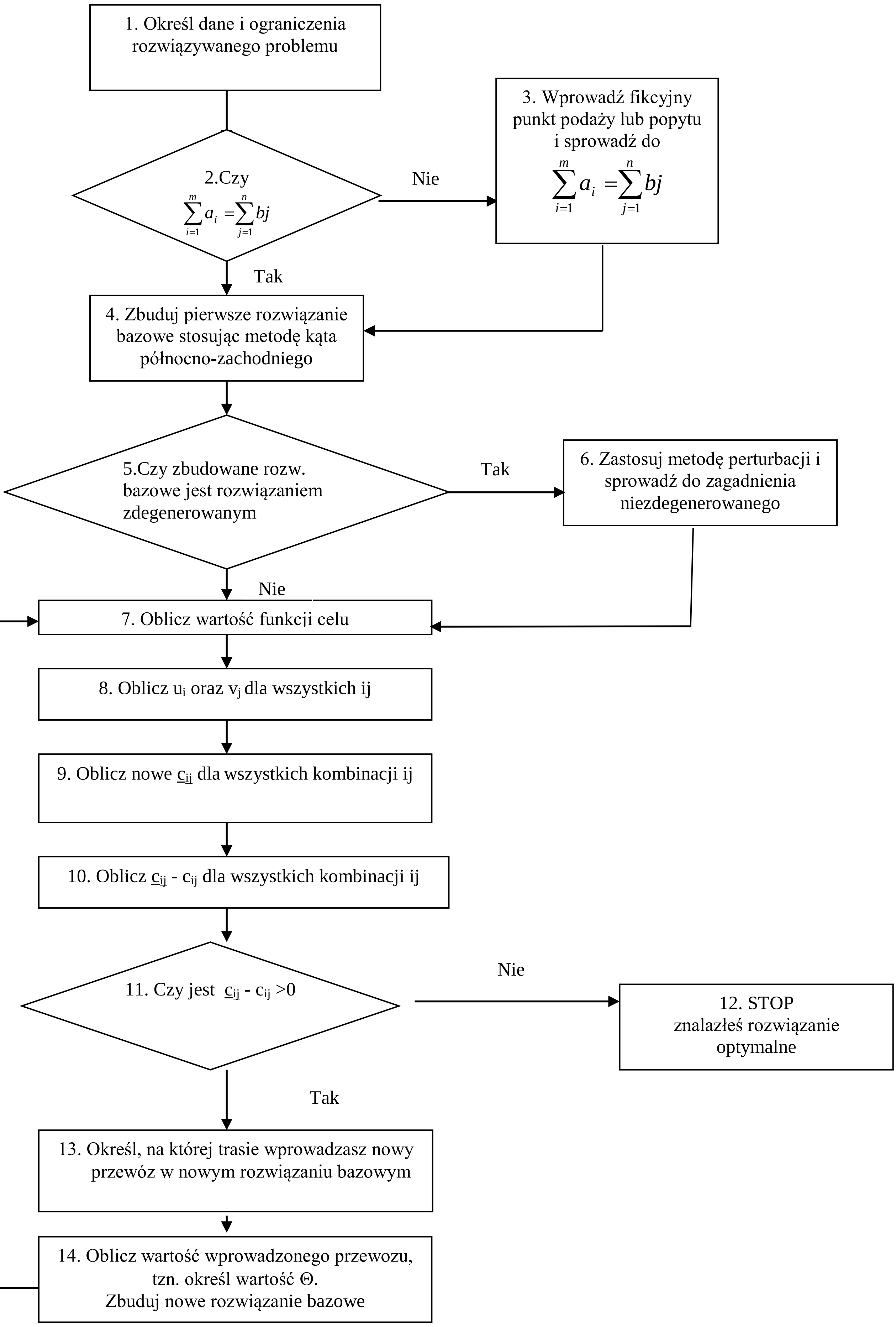
1. $\Sigma a_i > \Sigma b_j$

   wprowadź fikcyjny punkt popytu o popycie $b_{n+1} = \Sigma a_i - \Sigma b_j$ i $c_{i,n+1} = 0$ , i =1.....m.
   tzn wprowadź dodatkową kolumnę do macierzy zadania.

2. $\Sigma a_i < \Sigma b_j$

   wprowadź fikcyjny punkt podaży o podaży $a_{m+1} = \Sigma b_j - \Sigma a_i$ i $c_{m+1,j} = 0$ , j =1.....n
   tzn wprowadź dodatkowy wiersz do macierzy zadania.

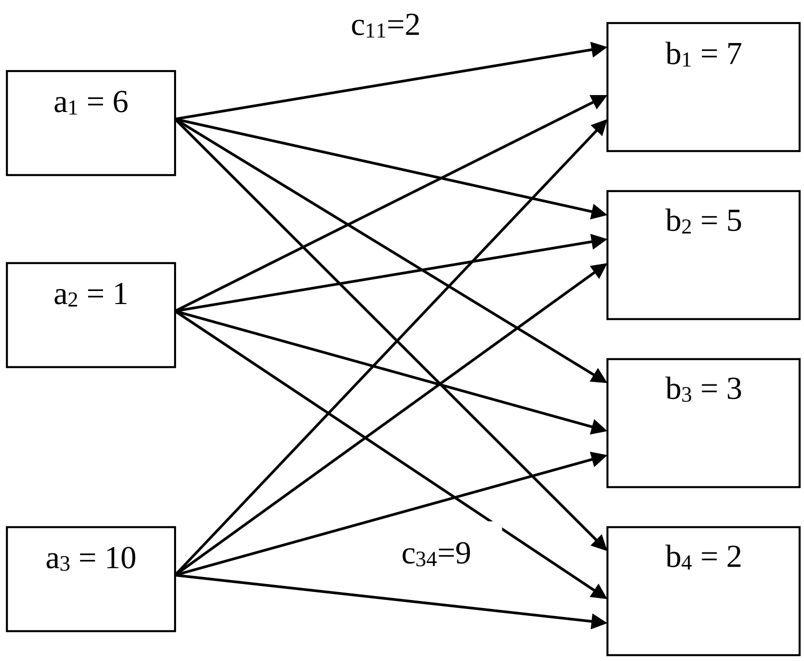
## Schemat blokowy zagadnienia transportowego



**Przykład:**

Z trzech cementowni transportowany jest cement do czterech zakładów produkcyjnych. Ilość sprzedawanego cementu, jego zapotrzebowanie na budowach i jednostkowe koszty przewozu na każdej trasie podane są poniżej. Znajdź ilości wożonego cementu na poszczególnych trasach, które zminimalizują całkowity koszt transportu i spełnią ograniczenia zadania.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_{11}^{\ 2}$ | $x_{12}^{\ 3}$ | $x_{13}^{\ 11}$ | $x_{14}^{\ 7}$ | $a_1 = 6$ |
| $x_{21}^{\ 1}$ | $x_{22}^{\ 0}$ | $x_{23}^{\ 6}$ | $x_{24}^{\ 1}$ | $a_2 = 1$ |
| $x_{31}^{\ 5}$ | $x_{32}^{\ 8}$ | $x_{33}^{\ 15}$ | $x_{34}^{\ 9}$ | $a_3 = 10$ |
| $b_1 = 7$ | $b_2 = 5$ | $b_3 = 3$ | $b_4 = 2$ | |




Czy $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} bj$; $\rightarrow$ $\sum_{i=1}^{3} a_i = 6 + 1 + 10 = 17$

$\sum_{ji=1}^{4} bj = 7 + 5 + 3 + 2 = 17 \rightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} bj$

**1. Poszukuję pierwsze rozwiązanie bazowe stosując metodę kąta północno - zachodniego.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 0 | 0 | 6-6=0 |
| | | | | 1 |
| | | | | 10 |
| 7-6=1 | 5 | 3 | 2 | |

$$x_{11} = \min(6,7) = 6$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1-1=0 |
| 0 | | | | 10 |
| 1-1=0 | 5 | 3 | 2 | |

$$x_{21} = \min(1,1) = 1$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 5 | | | 10-5=5 |
| 0 | 5-5=0 | 3 | 2 | |

$$x_{32} = \min(5,10) = 5$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 5 | 3 | | 5-3=2 |
| 0 | 0 | 3-3=0 | 2 | |

$$x_{33} = \min(3,5) = 3$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 5 | 3 | 2 | 2-2=0 |
| 0 | 0 | 0 | 2-2=0 | |

**$x_{34}$ = min(2,2) = 2**

**3. Pierwsze rozwiązanie bazowe**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | 6 |
| 1 | | | | 1 |
| | 5 | 3 | 2 | 10 |
| 7 | 5 | 3 | 2 | |

Czy rozwiązanie jest zdegenerowane? Rozwiązanie bazowe nazywamy zdegenerowanym, gdy (liczba $x_{ij}$ > 0) < (m + n - 1)

W przykładzie liczba $x_{ij}$ = 5 < 3 + 4 - 1 $\rightarrow$rozwiązanie jest zdegenerowane.

**4. Metoda perturbacji**

Zmienić wyjściowe wartości podaży i popytu wg zasady:

$\hat{a}_i = a_i + \varepsilon$ dla i = 1…m

$\hat{b}_j = b_j$ dla j = 1,…,n-1; $\hat{b}_n = b_n + m * \varepsilon$

gdzie $\varepsilon \langle \frac{\partial}{2m}$

m-liczba punktów podaży

$\partial$ -jednostka stojąca na najmniej znaczącym miejscu ( dokładność obliczeń)

W przykładzie $\varepsilon \langle \frac{1}{2 \bullet 3}$ $\rightarrow$ np. $\varepsilon = 0{,}1$ i ponownie stosuje się metodę kąta północno-zachodniego dla zmodyfikowanych wartości podaży i popytu.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6,1 | 0 | 0 | 0 | 6,1;0 |
| 0,9 | 0,2 | 0 | 0 | 1,1;0,0 |
| 0 | 4,8 | 3 | 2,3 | 10,1;5,3;2,3 |
| 7 | 5 | 3 | 2,3 | |
| 0,9 | 4,8 | 0 | | |
| 0 | 0 | | | |

Dzięki metodzie perturbacji możemy określić, które zero wprowadzamy do rozwiązania bazowego. W przykładzie do rozwiązania bazowego należy wprowadzić zero na pozycji 2.2 gdyż w metodzie perturbacji w tym miejscu nie występuje zero.

Ostatecznie pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe wynosi:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | 6 |
| 1 | 0 | | | 1 |
| | 5 | 3 | 2 | 10 |
| 7 | 5 | 3 | 2 | |

$FC_1 = 6\cdot2+1\cdot1+0\cdot0+5\cdot8+3\cdot15+2\cdot9 = 116$

**5. Obliczenie $u_i$ oraz $v_j$**

Dla zmiennych wchodzących do rozwiązania bazowego musimy wyznaczyć m liczb $u_i$ oraz n liczb $v_j$ takich, że $u_i + v_j = c_{ij}$ tzn. w przykładzie

| | | |
|---|---|---|
| $u_1 + v_1 = 2$ | $u_2 + v_2 = 0$ | $u_3 + v_3 = 15$ |
| $u_2 + v_1 = 1$ | $u_3 + v_2 = 8$ | $u_3 + v_4 = 9$ |

Układ równań jest nieoznaczony (siedem niewiadomych, sześć równań). Wyznaczamy rozwiązanie zakładając, że któraś ze zmiennych jest równa odpowiadającemu jej współczynnikowi $c_{ij}$. Obliczenia przeprowadzamy w tabeli.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | $u_1$ |
| 1 | 0 | | | $u_2$ |
| | 8 | 15 | 9 | $u_3$ |
| $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | |

Zakładam $u_1=2$ i rozwiązuję powyższy układ równań

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | $u_1 = 2$ |
| 1 | 0 | | | $u_2 = 1$ |
| | 8 | 15 | 9 | $u_3 = 9$ |
| $v_1 = 0$ | $v_2 = -1$ | $v_3 = 6$ | $v_4 = 0$ | |

**6. Obliczenie $\bar{c}_{ij}$ ; $\bar{c}_{ij} = u_1 + v_1$ dla wszystkich kombinacji ij:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 8 | 2 | $u_1=2$ |
| 1 | 0 | 7 | 1 | $u_2=1$ |
| 9 | 8 | 15 | 9 | $u_3=9$ |
| $v_1=0$ | $v_2=-1$ | $v_3=6$ | $v_4=0$ | |

**7. Obliczenie $\bar{c}_{ij} - c_{ij}$ :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | -2 | -3 | -5 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 |

Czy istnieje $\bar{c}_{ij} - c_{ij} > 0$ $\rightarrow$ Tak

**8. Wprowadzenie nowej trasy**

Trasa na której wprowadzam nowy przewóz: jest to trasa o największej $\bar{c}_{ij} - c_{ij}$. Jeśli istnieje kilka tras o takiej samej wartości maksymalnej, wybieram ten, dla którego $c_{ij}$ jest najmniejszy.

9. Wprowadzam przewóz na trasie 3.1.

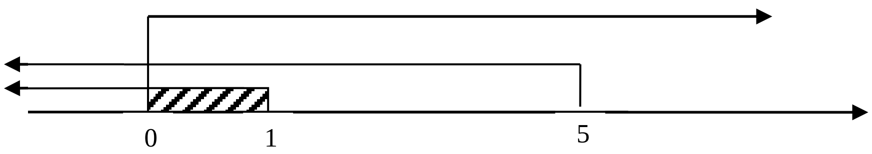
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | 6 |
| $1 - \Theta$ | $0 + \Theta$ | | | 1 |
| $\Theta$ | $5 - \Theta$ | 3 | 2 | 10 |
| 7 | 5 | 3 | 2 | |

Wartość $\Theta$ obliczam na podstawie następujących nierówności

$$\begin{cases} 1-\Theta \geq 0 \\ \Theta \geq 0 \\ 0 + \Theta \geq 0 \\ 5 - \Theta \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Theta \leq 1 \\ \Theta \geq 0 \\ \Theta \geq 0 \\ \Theta \leq 5 \end{cases}$$

Szukam największej wartości Θ, która spełnia te nierówności

$\rightarrow \Theta = 1$




Ponieważ wprowadzono nowy przewóz na trasie 3.1 jeden przejazd musi być również zlikwidowany.

Po wstawieniu Θ do starego rozwiązania bazowego otrzymujemy nowe rozwiązanie bazowe (zlikwidowano przewóz na trasie 2.1).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | 6 |
| | 1 | | | 1 |
| 1 | 4 | 3 | 2 | 10 |
| 7 | 5 | 3 | 2 | |

$FC_2 = 6 \cdot 2+1 \cdot 0+1 \cdot 5+4 \cdot 8+3 \cdot 15+2 \cdot 9=112$

**Uwaga!** Po zbudowaniu każdego nowego rozwiązania bazowego należy sprawdzić, czy zgadzają się sumy w wierszach z podażą, sumy w kolumnach z popytem i liczba tras bazowych jest m + n -1.

**W tym miejscu algorytm zaczyna się powtarzać.** Kolejne iteracje.

A. $u_1=2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 12 | 6 | $u_1=2$ |
| -3 | 0 | 7 | 1 | $u_2=-3$ |
| 5 | 8 | 15 | 9 | $u_3=5$ |
| $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | |
| 0 | +3 | 10 | 4 | |

$\bar{\bar{c}}_{ij} - c_{ij}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | **2** | 1 | -1 |
| -4 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6-Θ | Θ | | |
| | 1 | | |
| 1+Θ | 4-Θ | 3 | 2 |

$\rightarrow \Theta = \mathbf{4}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | | | 6 |
| | 1 | | | 1 |
| 5 | | 3 | 2 | 10 |
| 7 | 5 | 3 | 2 | |

$FC_3 = 2 \cdot 2+5 \cdot 5+4 \cdot 3+1 \cdot 0+3 \cdot 15+2 \cdot 3 = 104$

B. $u_1=3$ $\overset{=}{c}_{ij} - c_{ij}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 12 | 6 | $u_1$=-3 |
| -1 | 0 | 9 | 3 | $u_2$=0 |
| 5 | 6 | 15 | 9 | $u_3$=6 |
| $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | |
| -1 | 0 | 9 | 3 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | -1 |
| -2 | 0 | **3** | 2 |
| 0 | -2 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2-Θ | 4+Θ | | |
| | 1- Θ | Θ | |
| 5+Θ | | 3-Θ | 2 |

$\rightarrow \Theta = \mathbf{1}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | | | 6 |
| | | 1 | | 1 |
| 6 | | 2 | 2 | 10 |
| 7 | 5 | 3 | 2 | |

$FC_4 = 1\cdot2+5\cdot3+6\cdot5+1\cdot6+2\cdot15+2\cdot9 = 101$

C. $u_1=3$ $\overset{=}{c}_{ij} - c_{ij}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 12 | 6 | $u_1$=3 |
| -4 | -3 | 6 | 0 | $u_2$=-3 |
| 5 | 6 | 15 | 9 | $u_3$=6 |
| $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | |
| -1 | 0 | 9 | 3 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | **1** | -1 |
| -5 | -3 | 0 | -1 |
| 0 | -2 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-Θ | 5 | Θ | |
| | | 1 | |
| 6+Θ | | 2-Θ | 2 |

$\rightarrow \Theta = \mathbf{1}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 1 | | 6 |
| | | 1 | | 1 |
| 7 | | 1 | 2 | 10 |
| 7 | 5 | 3 | 2 | |

$FC_5 = 5\cdot3+1\cdot11+1\cdot6+7\cdot5+1\cdot15+2\cdot9 = 100$

D u1=11

$\overline{\overline{c}}_{ij} - c_{ij}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 11 | 5 | $u_1 = 11$ |
| - 4 | - 2 | 6 | 0 | $u_2 = 6$ |
| 5 | 7 | 15 | 9 | $u_3 = 15$ |
| $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | |
| - 10 | - 8 | 0 | - 6 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| - 1 | 0 | 0 | - 2 |
| - 5 | - 2 | 0 | - 1 |
| 0 | -1 | 0 | 0 |

**Czy istnieje** $\bar{c}_{ij} - c_{ij}$ **>0** → **Nie**

→

**Ostatnie rozwiązanie bazowe jest <u>rozwiązaniem optymalnym</u>**
**<u>$FC_{opt}$ = 100</u>**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **5** | **1** | | **6** |
| | | **1** | | **1** |
| **7** | | **1** | **2** | **10** |
| **7** | **5** | **3** | **2** | |

**$FC_{opt}$ = 5·3+1·11+1·6+7·5+1·15+2·9 = 100**