Mieczysław POŁOŃSKI

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Warszawa, ul. Nowoursynowska 159

e-mail: mieczyslaw_polonski@sggw.pl

Optymalizacja harmonogramów budowlanych - problem szeregowania zadań

Założenia

Jednym z ważnych elementów optymalizacji harmonogramów budowlanych jest poprawne szeregowanie zadań [Jaworski 1999]. Zadania tego typu należą do szerokiej klasy zagadnień rozdziału zadań i zasobów. Zaprezentowane poniżej zagadnienie zostanie przestawione na przykładzie ustalenia kolejności działek roboczych przy założeniu, że na każdej z nich muszą zostać wykonane pewne procesy technologiczne przez różne zasoby odnawialne (maszyny, robotników, brygady, środki produkcji), przy czym zakładamy, że na każdej działce muszą być wykonane wszystkie procesy w tej samej kolejności. Drugim założeniem jest, że na tej samej działce roboczej w tym samym czasie może przebywać wyłącznie jedna maszyna (brygada).

Harmonogram pracy wspomnianych *n* maszyn na *m* działkach można przedstawić w postaci macierzy czasów wykonania poszczególnych robót na kolejnych działkach.

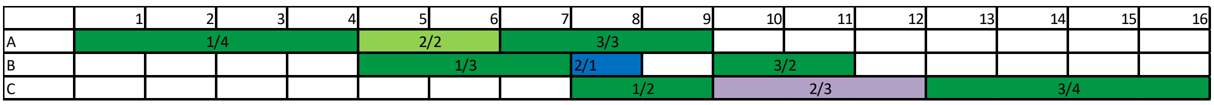
$$T = [t_{ij}] = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{m3} \end{vmatrix}$$

gdzie t_{ij} – to czas pracy i-tej maszyny na j-tej działce (i=1..m, j=1..n)

Łatwo zauważyć, że jeżeli poszczególne czasy t_{ij} będą różne, to łączny czas pracy wszystkich maszyn na wszystkich działkach *T* będzie zależał od kolejności, w jakiej zostanie zaplanowane realizacja prac na kolejnych działkach. I tak np. zakładając następujące czasy pracy trzech maszyn na trzech działkach:

	DZ1	DZ2	DZ3
A	4	2	3
B	3	1	2
C	2	3	4

i przyjmując kolejność pracy na działkach nr. 1, 2, 3 uzyskamy schematy pracy maszyn jak na rysunku poniżej (nr w środku pasków oznaczają nr działki / czas prasy danej maszyny na danej działce), z łącznym czasem pracy trzech maszyn na trzech działakch16 dni:



Analizując powyższy wykres należy zauważyć, że aby dana maszyna mogła rozpocząć pracę na danej działce muszą być spełnione dwa warunki: poprzednia maszyna musi zakończyć pracę na danej działce (działka musi być wolna) oraz dana maszyna musi zakończyć pracę na poprzedniej działce (maszyna musi być wolna). Jak można zauważyć w rozpatrywanym przypadku maszyna B, aby wejść na działkę nr 3 musi zaczekać jeden dzień (dzień nr 9), gdyż tego dnia pracuje tam jeszcze maszyna A.

Jednak po wykonaniu takich obliczeń nie wiemy, czy przy założonej kolejności prac na działkach (w tym wypadku 1, 2, 3) uzyskaliśmy najkrótszy możliwy łączny czas pracy na wszystkich działkach.

Przeanalizujmy następujący przykład. Pracują dwie maszyny A, B na czterech działkach.

Nr działki	1	2	3	4
Czas pracy maszyny A na działce	2	3	1	4
Czas pracy maszyny B na działce	4	2	3	2

Przyjmując kolejność wykonywania działek jak w temacie (1,2,3,4) uzyskamy następujący harmonogram pracy maszyn:

Nr dnia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Harmonogram (kolejność działek 1,2,3,4)													
Praca maszyny A													

Łączny czas pracy obu maszyn na wszystkich działkach wynosi 13 dni.

Jednak zmieniając kolejność działek na 3,1,4,2 uzyskujemy następujący harmonogram:

Nr działki	3	1	4	2
Czas pracy maszyny A na działce	1	2	4	3
Czas pracy maszyny B na działce	3	4	2	2

Nr dnia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Optymalny harmonogram (kolejność działek 3,1,4,2)													
Praca maszyny A													
Praca maszyny B													

Tym razem łączny czas pracy obu maszyn na wszystkich działkach wynosi 12 dni.

Problem poszukiwania takiej kolejności działek, która pozwoli na zminimalizowanie łącznego czasu pracy *T* na wszystkich działkach nazywany jest w literaturze problemem szeregowania zadań.

Analizując tak sformułowane zadanie, można szybko zauważyć, że liczba możliwych rozwiązań (harmonogramów pracy maszyn na wszystkich działkach) wynosi n!, gdzie n oznacza liczbę działek (warto również zauważyć, że na liczbę rozwiązań nie ma wpływu liczba maszyn, gdyż kolejność wykonywania procesów roboczych przez kolejne maszyny jest stała). To znaczy, że już przy 5 działkach liczba możliwych rozwiązań wynosi 120 a przy 8 to już 40320 wariantów harmonogramu. Biorąc pod uwagę fakt, że czas pracy na obiekcie jest jednym z najważniejszych parametrów a przykładowa i większa liczba działek roboczych w budownictwie nie jest niczym szczególnym, szybko zrozumiemy wagę postawionego problemu.

Istnieje kilka metod szeregowania zadań. Należą do nich: algorytm symulacyjny, algorytm Johnsona, algorytm Łomnickiego i algorytm Browna – Łomnickiego. Wszystkie te metody podejmują temat z uwzględnieniem kryterium minimum czasu realizacji przedsięwzięcia a wybór jednego z nich zależy od liczby maszyn.

Algorytm symulacyjny możemy stasować przy dowolnej liczbie maszyn, jednak nie zapewnia on znalezienia rozwiązania optymalnego, lecz jedynie suboptymalnego. Polega on na losowaniu kolejności realizacji działek na podstawie generatora liczb losowych i obliczaniu łącznego czasu trwania robót T dla założonego wariantu. Przy odpowiedniej liczbie prób najlepszy wynik powinien zbliżyć się do rozwiązania optymalnego, a na pewno być lepszy od jednego przypadkowego rozwiązania. Tego rodzaju symulacje stosuje się w badaniach operacyjnych, gdy nie jest znany ścisły algorytm wyznaczania rozwiązania optymalnego bądź też koszt lub czas wykonania obliczeń algorytmicznych jest zbyt duży w stosunku do uzyskanego efektu.

Pozostałe wymienione algorytmy pozwalają na obliczenie rozwiązania optymalnego. Algorytm Jonhsona stosuje się, gdy mamy do czynienia z dwoma maszynami, algorytm Łomnickiego przy trzech maszynach a algorytm Browna – Łomnickiego przy dowolnej liczbie maszyn. Dwa ostatnie algorytmy oparte są na metodzie podziału i ograniczeń (branch and bound).

Algorytm Jonhsona

Algorytm ten pozwala poszukiwać najkrótszy czas pracy dwóch maszyn (oznaczamy je A, B) na dowolnej liczbie działek n. Na każdej działce, kolejność pracy maszyn jest stała, a więc najpierw pracuje maszyna A, a potem B. Dane są czasy pracy obu maszyn na każdej działce. Czas pracy maszyny A na działce k oznaczamy a_k , maszyny B na działce l b_l

Poniżej znajduje się opis poszczególnych kroków algorytmu:

1. Przyjąć $r = 1,\ s = n$.
2. Znaleźć najmniejszą liczbę spośród czasów $a_k, b_l \quad (k, l = 1,2,\ldots,n)$, gdzie a_k, b_l są zbiorami czasów pracy maszyn A i B na poszczególnych działkach roboczych.
3. Jeżeli liczbą tą jest a_k , to $p_r = k$ oraz $r := r + 1$, jeżeli zaś liczbą tą jest b_l , to $p_s = l$ oraz $s := s - 1$.
4. Usunąć ze zbioru czasów trwania parę (a_k, b_k) lub (a_l, b_l) .
5. Powtórzyć postępowanie od punktu 2.

   Optymalną kolejność działek wyznacza parametr p_1 do p_n .

Przykład

Uwaga! Szczególną uwagę proszę zwrócić na to, jak zmienia się indeks parametru p

Dane są czasy pracy maszyn A i B (w dniach roboczych) na sześciu działkach.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	2	3	5	1	7	6
B	3	4	4	2	5	5

Iteracja 1.

	1	2	3	**4**	5	6
A	2	3	5	**1**	7	6
B	3	4	4	**2**	5	5

r = 1; s = 6

min (2, 3, 5, 1, 7, 6, 3, 4, 4, 2, 5, 5) = $a_k = a_4 = 1$; -> k=4

W sytuacji, gdy jest więcej takich samych wartości minimalnych wybieramy dowolną z nich i konsekwentnie liczymy dla wybranej maszyny i działki.

Ponieważ znaleziony minimalny czas dotyczy pracy maszyny A -> $p_r = p_1 = k = 4$

oraz $r = r + 1 = 1 + 1 = 2$

Usuwam parę (a_4, b_4)

Iteracja 2.

	1	2	3	4	5	6
A	**2**	3	5		7	6
B	**3**	4	4		5	5

$r = 2; s = 6$

min (2, 3, 5, 7, 6, 3, 4, 4, 5, 5) = $a_k = a_1 = 2$; -> k=1

Ponieważ znaleziony minimalny czas dotyczy pracy maszyny A -> $p_r = p_2 = k = 1$

oraz $r = r + 1 = 2 + 1 = 3$

Usuwam parę (a_1, b_1)

Iteracja 3.

	1	**2**	3	4	5	6
A		**3**	5		7	6
B		**4**	4		5	5

$r = 3; s = 6$

min (3, 5, 7, 6, 4, 4, 5, 5) = $a_k = a_2 = 3$; -> k=2

Ponieważ znaleziony minimalny czas dotyczy pracy maszyny A -> $p_r = p_3 = k = 2$

oraz $r = r + 1 = 3 + 1 = 4$

Usuwam parę (a_2, b_2)

Iteracja 4.

	1	2	**3**	4	5	6
A			**5**		7	6
B			**4**		5	5

$r = 4; s = 6$

min (5, 7, 6, 4, 5, 5) = $b_l = b_3 = 4$; -> l =3

Ponieważ znaleziony minimalny czas dotyczy pracy maszyny B -> $p_s = p_6 = l = 3$

oraz $s = s - 1 = 6 - 1 = 5$

Usuwam parę (a_3, b_3)

Iteracja 5.

	1	2	3	4	**5**	6
A					**7**	6
B					**5**	5

$r = 4; s = 5$

min (7, 6, 5, 5) = $b_l = b_5 = 5$; -> l =5

Ponieważ znaleziony minimalny czas dotyczy pracy maszyny B -> $p_s = p_5 = l = 5$

oraz $s = s - 1 = 5 - 1 = 4$

Usuwam parę (a_5, b_5)

Iteracja 6.

	1	2	3	4	5	**6**
A						**6**
B						**5**

r = 4; s = 4

min (6, 5) = $b_l = b_6$ = 5; -> l =6

Ponieważ znaleziony minimalny czas dotyczy pracy maszyny B -> $p_s = p_4 = l = 6$

Usuwam parę (a_6, b_6), zbiór przeszukiwanych wartości pozostaje pusty i kończę obliczenia.

Znalezione rozwiązanie to: p_1 = 4, p_2 = 1, p_3 = 2, p_4 = 6, p_5 = 5, p_6 = 3, czyli wyznaczona kolejność wykonywania robót to działki nr: 4, 1, 2, 6, 5, 3.

Algorytm Jonhsona nie wyznacza optymalnego czasu robót. Należy go obliczyć znając właściwą kolejność działek.

Można go obliczyć stosując następujący wzór:

$T_{ij}^{p} = \max\left(T_{(i-1),j}^{k}, T_{i,(j-1)}^{k}\right)$ oraz $T_{ij}^{k} = T_{ij}^{p} + t_{i,j}$

gdzie T_{ij}^{p}, T_{ij}^{k} to odpowiedni początek i koniec robót przez maszynę i na działce j.

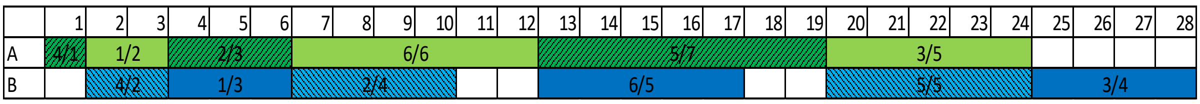
Analizując wzór można zauważyć, że termin rozpoczęcia pracy na kolejnej działce wymaga spełnienia dwóch warunków: *(1)* musi zakończyć pracę na poprzedniej działce maszyna, która rozpocznie pracę oraz *(2)* na danej działce musi zakończyć pracę poprzednia maszyna.

Wydaje się, że jeszcze łatwiej wyznaczyć poszukiwany czas pracy graficznie, stosując dwie opisane powyżej zasady. Pamiętając, że zadane czasy pracy maszyn A i B (w dniach roboczych) na sześciu działkach wynosiły odpowiednio:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	2	3	5	1	7	6
B	3	4	4	2	5	5

w analizowanym przykładzie harmonogram pracy maszyn na kolejnych działkach (tzn. wg kolejności działek 4, 1, 2, 6, 5, 3) wyglądałby następująco (pracę tej samej maszyny na kolejnych działkach rozróżniono odcieniami tego samego koloru; biały kolor oznacza brak pracy danej maszyny; podane wartości na rysunku oznaczają nr. działki/czas pracy danej maszyny na danej działce):

	4	**1**	**2**	**6**	**5**	**3**
A	1	2	3	6	7	5
B	2	3	4	5	5	4



Jak można odczytać z wykresu łączny, minimalny czas pracy obu maszyn na sześciu działkach wynosi 28 dni. Łatwo zauważyć, że pierwsza maszyna (A) pracuje zawsze bez żadnych przerw (zawsze jest wolna i nigdy nie czeka na zakończenie pracy przez poprzednią maszynę na danej działce). Przerwy w pracy mogą występować tylko w pracy wszystkich kolejnych maszyn, czyli w tym wypadku maszyny B.

Przykład wyznaczenia terminów i sumarycznego czasu pracy trzech maszyn na trzech działkach

Przyjmijmy, że harmonogram pracy *3* maszyn A, B i C (i) na *3* działkach(j) w postaci macierzy czasów wykonania poszczególnych robót na kolejnych działkach wygląda następująco:

$$T = [t_{ij}] = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

gdzie t_{ij} – to czas pracy i-tej maszyny na j-tej działce (i=3, j=3)

Terminy pracy poszczególnych maszyn na kolejnych działkach można obliczyć stosując następujący wzór:

$T_{ij}^{p} = \max\left(T_{(i-1),j}^{k}, T_{i,(j-1)}^{k}\right)$ oraz $T_{ij}^{k} = T_{ij}^{p} + t_{i,j}$

gdzie T_{ij}^{p}, T_{ij}^{k} to odpowiedni początek i koniec robót przez maszynę *i* na działce *j.*

Przyjmując kolejność działek jak w danych, czyli 1, 2, 3 wyznaczam terminy dla kolejnych maszyn:

Terminy pracy maszyny A:

$T_{11}^{P} = 0$; termin pracy pierwszej maszyny na pierwszej działce przyjmujemy założenia

$T_{11}^{K} = T_{11}^{P} + t_{11} = 0 + 4 = 4;$

$T_{12}^{P} = max(T_{02}^{K}; T_{11}^{K}) = max(0,4) = 4$

$T_{12}^{K} = T_{12}^{P} + t_{12} = 4 + 2 = 6;$

$T_{13}^{P} = max(T_{03}^{K}; T_{12}^{K}) = max(0,6) = 6$

$T_{13}^{K} = T_{13}^{P} + t_{13} = 6 + 3 = 9;$

Terminy pracy maszyny B:

$T_{21}^{P} = max(T_{11}^{K}; T_{20}^{K}) = max(4,0) = 4$

$T_{21}^{K} = T_{21}^{P} + t_{21} = 4 + 3 = 7;$

$T_{22}^{P} = max(T_{12}^{K}; T_{21}^{K}) = max(6,7) = 7$

$T_{22}^{K} = T_{22}^{P} + t_{22} = 7 + 1 = 8;$

$T_{23}^{P} = max(T_{13}^{K}; T_{22}^{K}) = max(9,8) = 9$

$T_{23}^{K} = T_{23}^{P} + t_{23} = 9 + 2 = 11;$

Terminy pracy maszyny C:

$T_{31}^{P} = max(T_{21}^{K}; T_{30}^{K}) = max(7,0) = 7$

$T_{31}^{K} = T_{31}^{P} + t_{31} = 7 + 2 = 9;$

$T_{32}^{P} = max(T_{22}^{K}; T_{31}^{K}) = max(8,9) = 9$

$T_{32}^{K} = T_{32}^{P} + t_{32} = 9 + 3 = 12;$

$T_{33}^{P} = max(T_{23}^{K}; T_{32}^{K}) = max(11,12) = 12$

$T_{33}^{K} = T_{33}^{P} + t_{33} = 12 + 4 = 16;$

Termin zakończenia pracy przez ostatnią maszynę na ostatniej działce wyznacza łączny czas pracy na obiekcie, który w tym wypadku wynosi 16.

Graficzny wykres pracy maszyn ABC przedstawiono poniżej:

<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="4">1/4</td><td colspan="2">2/2</td><td colspan="3">3/3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">1/3</td><td>2/1</td><td></td><td colspan="2">3/2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">1/2</td><td colspan="3">2/3</td><td colspan="4">3/4</td></tr>
</table>

Literatura

Jaworski K.M. (1999). Metodologia projektowania realizacji budowy. Wydawnictwo Naukowe PWN