ALGORYTM OPTYMALNEGO WYRÓWNANIA WYKRESU ZATRUDNIENIA METODĄ GRAFICZNĄ

Mieczysław POŁOŃSKI

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Warszawa, ul. Nowoursynowska 159

e-mail: mieczyslaw_polonski@sggw.pl

Streszczenie: Artykuł opisuje nowy, zaproponowany przez autora algorytm wyznaczenia optymalnego wyrównania wykresu zatrudnienia ze względu na kryterium kosztowe, gdy ponoszony jest równocześnie koszt przekroczenia wymaganego zapotrzebowania na analizowany zasób oraz koszt zmiany poziomu zatrudnienia. Założono, że obie funkcje zmiany kosztów nie muszą być liniowe, zatrudnienie musi być zawsze zaspokojone i nie może być magazynowane. Algorytm wyznacza pożądane zatrudnienie każdego analizowanego dnia, poszukując rozwiązania ze względu na minimalny łączny koszt przekroczenia wymaganego zapotrzebowania i zmiany poziomu zatrudnienia. W algorytmie zastosowano rozwiązanie oparte na programowaniu sieciowym.

Słowa kluczowe: optymalizacja, wyrównanie zatrudnienia, minimalizacja kosztu zatrudnienia, programowanie dynamiczne.

1. Wprowadzenie

Problem optymalnego wyrównywania wykresu zatrudnienia w harmonogramach budowlanych jest zagadnieniem stale aktualnym. W swojej ostatniej książce prof. K. M. Jaworski (2004) proponuje, aby to zagadnienie rozwiązywać ze względu na kryterium kosztowe, przy czym brać pod uwagę dwa różne koszty: w sytuacji, gdy zatrudnienie na budowie przekracza wymagane zapotrzebowanie koszt związany z niewykorzystaniem danego środka produkcji, określony funkcją Θ zależną od stopnia przekroczenia wymaganego zapotrzebowania oraz koszt Ψ wyrażający nakłady ponoszone na zmianę poziomu zatrudnienia analizowanego zasobu, również uzależniony od wielkości zmiany zatrudnienia w kolejnych okresach czasu. Poszukiwane rozwiązanie powinno minimalizować sumę obu rozpatrywanych kosztów Θ i Ψ w całym horyzoncie planowania. Tak sformułowane zagadnienie zmienia dotychczasowe podejście do wyrównywania wykresów zatrudnienia, które skupiało się głownie na wyrównywaniu wykresu sprawdzającego.

Rozwiązanie takiego zagadnienia wymaga jeszcze jego uściślenia. Zakłada się, że horyzont czasowy harmonogramu został podzielony na N skończonych etapów a w każdym z tych etapów (np. dni, miesięcy) określone jest niezbędne do zrealizowania odpowiednich procesów technologicznych zapotrzebowanie jednego odnawialnego zasobu. Ze względu na fakt, że do obliczeń przyjmowany jest zasób odnawialny przyjmuje się, że nie może być on magazynowany. Ponad to zakłada się, że wyznaczone w procesie obliczeń zatrudnienie każdego dnia nie może być mniejsze niż wymagane zapotrzebowanie, natomiast maksymalne zatrudnienie, jakie może wystąpić na budowie równe jest maksymalnemu zapotrzebowaniu występującemu w analizowanym okresie. Jeżeli chodzi o koszty przekroczenia zapotrzebowania Θ oraz koszty zmiany poziomu zatrudnienia Ψ, to są one wyrażone w postaci związku funkcyjnego, przy czym nie musi to być funkcja liniowa. Przy wyznaczaniu kosztów zmiany zatrudnienia Ψ można również przyjąć różne stawki w zależności do tego, czy zatrudnienie w kolejnych jednostkach rośnie czy też maleje. Należy również zdefiniować, czy w obliczeniach uwzględnia się stan zatrudnienia przed rozpoczęciem robót a tym samym ewentualny koszt zmiany tego zatrudnienia w stosunku do pierwszego dnia robót.

Metoda

Dokładny opis modelu matematycznego rozpatrywanego zagadnienia można znaleźć w książce Jaworskiego (2004). Jak zauważa autor, tak sformułowane zagadnienie można traktować jako wieloetapowy, dynamiczny proces wyrównywania (Siudym 1986) a do jego rozwiązania zastosować algorytm programowania dynamicznego, oparty na zasadzie optymalności Bellmana (Benjamin i Cornell 1977) mówiącej, że polityka optymalna ma tę własność, że niezależnie od początkowego stanu i początkowej decyzji pozostałe decyzje muszą stosować politykę optymalną ze względu na stan wynikający z pierwszej decyzji. Korzystając z tej własności algorytm programowania dynamicznego rozkłada cały analizowany proces na etapy i poszukuje rozwiązania optymalnego przechodząc przez kolejne wyróżnione etapy, rozpoczynając od ostatniego i cofając się aż do pierwszego.

Taki sposób rozwiązania narzuca określony sposób notacji prowadzonych obliczeń, który nie zawsze jest czytelny, szczególnie dla osób słabiej obeznanych z badaniami operacyjnymi. W swojej książce Jaworski zamieszcza przykład obliczeniowy, który ilustruje omawiane zagadnienie i sposób jego rozwiązania oparty właśnie na programowaniu dynamicznym.

Zamieszczone obliczenia nie zawierają wszystkich niezbędnych kroków obliczeniowych, a jedynie ilustrują przyjęty metodykę prowadzenia obliczeń, sposób zapisu wyników pośrednich oraz ostateczne rozwiązanie. Dobre zrozumienie zamieszczonego przykładu wymaga uważnego przeanalizowania podanych wyników oraz wykonania obliczeń dodatkowych, nie koniecznie oczywistych dla każdego czytelnika.

Ponieważ podniesione przez autora przykładu zagadnienie jest ważne i może mieć również duże znaczenie praktyczne, wydaje się, że warto poszukać rozwiązania tego zagadnienia, które by w prostszy sposób prowadziło do wyznaczenia poszukiwanych wartości zatrudnienia. Autor artykułu proponuje zastosować algorytm oparty na grafach (Korzan 1978), który w jego przekonaniu pozwala czytelniej wyznaczyć optymalne zatrudnienie. Poniżej podano opis użytych w algorytmie oznaczeń oraz opisano sam algorytm. W dalszej części artykułu zamieszczono dwa przykłady ilustrujące zastosowanie zaproponowanego algorytmu.

Oznaczenia:

N – liczba dni, dla których wykonywane są obliczenia,

j – numer kolejnego dnia,

r_j – zapotrzebowanie na robotników w dniu j,

c – poziom zatrudnienia przed rozpoczęciem prac (w dniu j=0),

R- maksymalne zatrudnienie, jakie może wystąpić na budowie; R = max(r_j) dla j=1..N,

$u_{j,u}$ – rozpatrywany poziom zatrudnienia w dniu j o wielkości u; u € <1;R>

x_j – poszukiwane zatrudnienie w dniu j,

$\Theta_{j,u}$ – koszt przekroczenia wymaganego zapotrzebowania w dniu j przy poziomie zatrudnienia u,

$\Psi_{u1,u2}$ – koszt zmiany poziomu zatrudnienia z poziomu u1 na poziom u2,

$k_{\Theta,\Psi}$ – łączny koszt przekroczenia wymaganego zapotrzebowania Θ i zmiany poziomu zatrudnienia Ψ,

$K1_{j,u}$ – sumaryczny koszt zatrudnienia od początku do dnia j, przy poziomie zatrudnienia u w dniu j,

$K2_{j,u}$ – sumaryczny fikcyjny koszt zatrudnienia podczas liczenia od końca do dnia j, przy poziomie zatrudnienia u w dniu j (może być ujemny).

Wszystkie przyjęte oznaczenia nawiązują do oznaczeń użytych przez Jaworskiego (2004) oprócz nowo wprowadzonych, niezbędnych ze względu na zastosowany algorytm.

Opis algorytmu

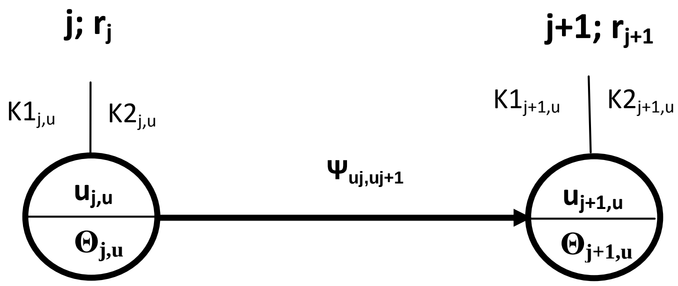
Poniżej zamieszczony opis algorytmu został tak skonstruowany, aby nawet mało wprawny czytelnik mógł go łatwo zastosować. Świadomie zrezygnowano z formalnego zapisu formuł matematycznych i schematu blokowego, mając nadzieję, że taki sposób jego prezentacji jest dostatecznie precyzyjny a równocześnie prosty w zastosowaniu. Proponuje się, aby opis algorytmu śledzić równocześnie z wynikami obliczeń, zamieszczonych na rysunku 2 na str. 8, co powinno znacznie ułatwić jego zrozumienie.

1. Narysuj tyle kolumn ile dni obejmuje zadanie (1..N). Na górze każdej kolumny wpisz kolejny numer dnia (j), zaczynając od pierwszej kolumny z lewej strony.
2. Dodaj na początku i na końcu po jednej dodatkowej kolumnie (j=0 i j=N+1)
3. Wpisz na górze każdej kolumny wymagane zapotrzebowanie r_j. Jeżeli chcesz uwzględnić w obliczeniach koszt zmiany poziomu zatrudnienia c sprzed rozpoczęcia (dzień zerowy) i pierwszego dnia, zdefiniuj też zapotrzebowanie przed rozpoczęciem zadania c (np.0).
4. Określ maksymalne zatrudnienie (R) na budowie równe maksymalnemu zapotrzebowaniu w okresie obliczeń; $R = \max(r_j)$ dla j=1..N.
5. W każdej kolumnie odpowiadającej kolejnym dniom j narysuj w pionie tyle kółek (nazywanych dalej węzłami), ile może wystąpić poziomów zatrudnienia danego dnia czyli $R - r_j +1$. W zerowej i ostatniej kolumnie wstaw tylko po jednym węźle. Nad każdym węzłem postaw krótką pionową kreskę.
6. Każdy węzeł podziel poziomą kreską. W górnej części każdego węzła wpisz rozpatrywane poziomy zatrudnienia danego dnia $u_{j,u}$. Zacznij w każdym dniu od góry, wpisując R, niżej R-1, R-2 itd. aż do r_j.
7. W dolnej części każdego węzła wpisz koszt przekroczenia zapotrzebowania $\Theta_{j,u}$ odpowiadający założonemu zatrudnieniu $u_{j,u}$ i faktycznemu zapotrzebowaniu danego dnia r_j. W zerowej i ostatniej kolumnie wstaw koszt przekroczenia zapotrzebowania $\Theta_{j,u} =0$ (dla j=0 i j=N+1)
8. Połącz w sąsiednich kolumnach każdy węzeł z każdym, kierując zwrot strzałki w prawo.
9. Na każdym połączeniu oblicz i wpisz koszt zmiany poziomu zatrudnienia ($\Psi_{u1,u2}$) biorąc pod uwagę poziomy zatrudnienia wpisane w górnej części łączonych węzłów (u1 i u2). Zwróć uwagę na kolejność łączonych węzłów, czyli czy poziom zatrudnienia rośnie czy maleje. Jeżeli nie został określony poziom zatrudnienia przed

rozpoczęciem prac c, na połączeniach między dniem j=0 i j=1 koszty $\Psi_{u1,u2}$ przyjmij zero. Na połączeniach między dniem N i N+1 również przyjmij koszty $\Psi_{u1,u2}$ równe zero.

10. Przy węźle w zerowej kolumnie z lewej strony pionowej kreski wpisz zero.
11. Oblicz tak zbudowany graf od lewej strony do prawej wpisując obliczone wartości $K1_{j,u}$ z lewej strony pionowej kreski przy każdym węźle. Na każdym połączeniu oblicz $k_{\Theta,\Psi}$ będący sumą kosztów $\Theta_{j,u}$ (wpisanych w dolnej części węzła, do którego dochodzi połączenie) i $\Psi_{u1,u2}$ (wpisanych na połączeniu). Obliczona wartość $K1_{j+1,u}$ to minimum z wszystkich wartości ($k_{\Theta,\Psi}$ + wartość $K1_{j,u}$ czyli z węzła, z którego wychodzi połączenie) występujących na połączeniach dochodzących do danego węzła (dla danego u_{j+1}).
12. W ostatnim węźle z prawej strony (w kolumnie z dnia N+1) z prawej strony pionowej kreski węzła wpisz wartość obliczoną z lewej strony ($K2_{N+1,u}= K1_{N+1,u}$)
13. Oblicz graf od prawej strony do lewej wpisując obliczone wartości $K2_{j,u}$ z prawej strony pionowej kreski przy każdym węźle. Na każdym połączeniu oblicz sumę kosztów $k_{\Theta,\Psi}$ będący sumą kosztów $\Theta_{j,u}$ (wpisanych w dolnej części węzła, do którego dochodzi połączenie) i $\Psi_{u1,u2}$ (wpisanych na połączeniu). Obliczona wartość $K2_{j,u}$ to maksimum z wszystkich wartości: ($K2_{j+1,u}$ czyli z węzła, do którego dochodzi połączenie, - $k_{\Theta,\Psi}$) występujących na połączeniach wychodzących z danego węzła (dla danego u_j).
14. Wyróżnij w każdym dniu węzeł w którym $K1_{j,u} = K2_{j,u}$ oraz połączenia łączące wyróżnione węzły.
15. Wartości $u_{j,u}$ z wyróżnionych węzłów wskazują optymalne poziomy zatrudnienia każdego rozpatrywanego dnia x_j. Wartość $K1_{N+1,u} = K2_{N+1,u}$ wpisana nad skrajnym prawym węzłem wyznacza minimalny koszt zatrudnienia (funkcji celu) przy przyjętych do obliczeń założeniach.

Poniżej na rys.1 przedstawiono używane oznaczenia a dalej wzory do wyznaczenia wartości K1 i K2.



Rys. 1 Oznaczenia używane na grafie podczas obliczeń

$K1_{j+1,u} = \min(K1_{j,u} + \Theta_{j+1,u} + \Psi_{uj,uj+1}) = \min (K1_{j,u} + k_{\Theta,\Psi})$ dla wszystkich u_j

$K2_{j,u} = \max(K2_{j+1,u} - \Theta_{j+1,u} - \Psi_{uj,uj+1}) = \max (K2_{j+1,u} - k_{\Theta,\Psi})$ dla wszystkich u_{j+1}

Przykłady obliczeniowe

Opracowany algorytm został przedstawiony na dwóch przykładach. Pierwszy dotyczy rozwiązania zadania zaczerpniętego ze wspomnianej wcześniej książki Jaworskiego (2004).

W przykładzie wyróżniono cztery okresy obliczeniowe (N=4) oraz w każdym z nich podano wymagane zapotrzebowanie na określony rodzaj środka produkcji wynoszące odpowiednio: $r_1=4$, $r_2=3$, $r_3=5$, $r_4=2$. Koszt przekroczenia wymaganego zapotrzebowania $\Theta_{j,u}$ został określony na 5 jednostek nakładów finansowych za przekroczenie każdej jednostki zapotrzebowania (niezależnie od wielkości przekroczenia czyli w postaci funkcji prostoliniowej).

Zmiana wielkości limitu zatrudnienia w dwóch kolejnych przedziałach czasu powoduje koszt, którego wielkość można wyrazić formułą :

$\Psi_{u1,u2} = 6 + (u2 - u1)$ dla $u_2 > u_1$

$\Psi_{u1,u2} = 6$ dla $u_2 < u_1$

$\Psi_{u1,u2} = 0$ dla $u_2 = u_1$

Widać, że w tym wypadku funkcja nie jest prostoliniowa i zależy od wielkości różnicy w zatrudnieniu. Jeżeli zatrudnienie obniża poziom, strata wynosi 6 jednostek finansowych niezależnie od wielkości obniżki, jeżeli zatrudnienie wzrasta, wielkość straty finansowej zależy od wzrostu zatrudnienia. Ponadto przyjęto, że poziom zatrudnienia przed rozpoczęciem prac nie wpływa na wynik obliczeń.

Po wyznaczeniu R=5 jako wartości maksymalnej z wymaganego zatrudnienia w rozpatrywanym okresie czterech dni, narysowano graf (rys.2) zawierający odpowiednią liczbę węzłów w każdym dniu (odpowiadającą rozpatrywanym poziom zatrudnienia w każdym dniu) i zgrupowanych w sześciu kolumnach (cztery dni obliczeniowe plus po jednej kolumnie na początku i na końcu). Na górze każdej kolumny oznaczono numer kolejnego dnia j i wymagane zapotrzebowanie w danym dniu r_j. Następnie w każdym węźle opisano w górnej części rozpatrywany poziom zatrudnienia $u_{j,u}$ oraz w dolnej części koszt nadmiernego zatrudnienia $\Theta_{j,u}$. Po połączeniu strzałkami wszystkich sąsiadujących węzłów, obliczono na każdym połączeniu koszt zmiany poziomu zatrudnienia $\Psi_{uj,uj+1.}$ Następnie nadano wartość 0 parametrowi $K1_{0,-}$ na pierwszym z lewej strony węźle (j=0) i policzono wszystkie wartości $K1_{j,u}$ zaczynając od lewej strony i przechodząc do prawej. Przykładowo, poniżej podano sposób obliczenia wartości $K1_{3,5}$ (dla j=3 przy poziomie zatrudnienia równym 5) :

$K1_{3,5}$ = min[(15+0+0); (5+7+0) ;(6+8+0)] = 12

Znając wartość parametru $K1_{5,-}$ = 18 na ostatnim węźle z prawej strony (j=5), zainicjowano wartość parametru $K2_{5,-}$ = 18 na tym samym węźle. W dalszej części obliczeń wyznaczono wszystkie pozostałe parametry $K2_{j,u}$, prowadząc obliczenia od prawej strony do lewej. Przykładowo, poniżej podano sposób obliczenia wartości $K2_{3,5}$:

$K2_{3,5}$ = max[(18-15-0); (18-10-6); (18-5-6) ;(18-0-6)] = 12

Sprawdzeniem poprawności wykonanych obliczeń może być uzyskanie na węźle dla j=0 parametru $K2_{0,-}$ równego 0. Znając oba parametry $K1_{j,u}$ i $K2_{j,u}$ dla wszystkich węzłów wyróżniono grubą linią wszystkie węzły, w których parametr $K1_{j,u}$ równy jest $K2_{j,u}$ i na podstawie wartości $u_{j,u}$ z tych węzłów wyznaczono poszukiwane zatrudnienie każdego dnia. Obliczone wartości zatrudnienia x_j zostały wypisane na dole każdej kolumny. Wartość funkcji celu, a więc całkowity koszt przekroczenia zatrudnienia i zmiany poziomów zatrudnienia, równy 18 odczytano jako parametr $K1_{j,u} = K2_{j,u}$ dla dnia N+1, czyli w tym wypadku j=5.

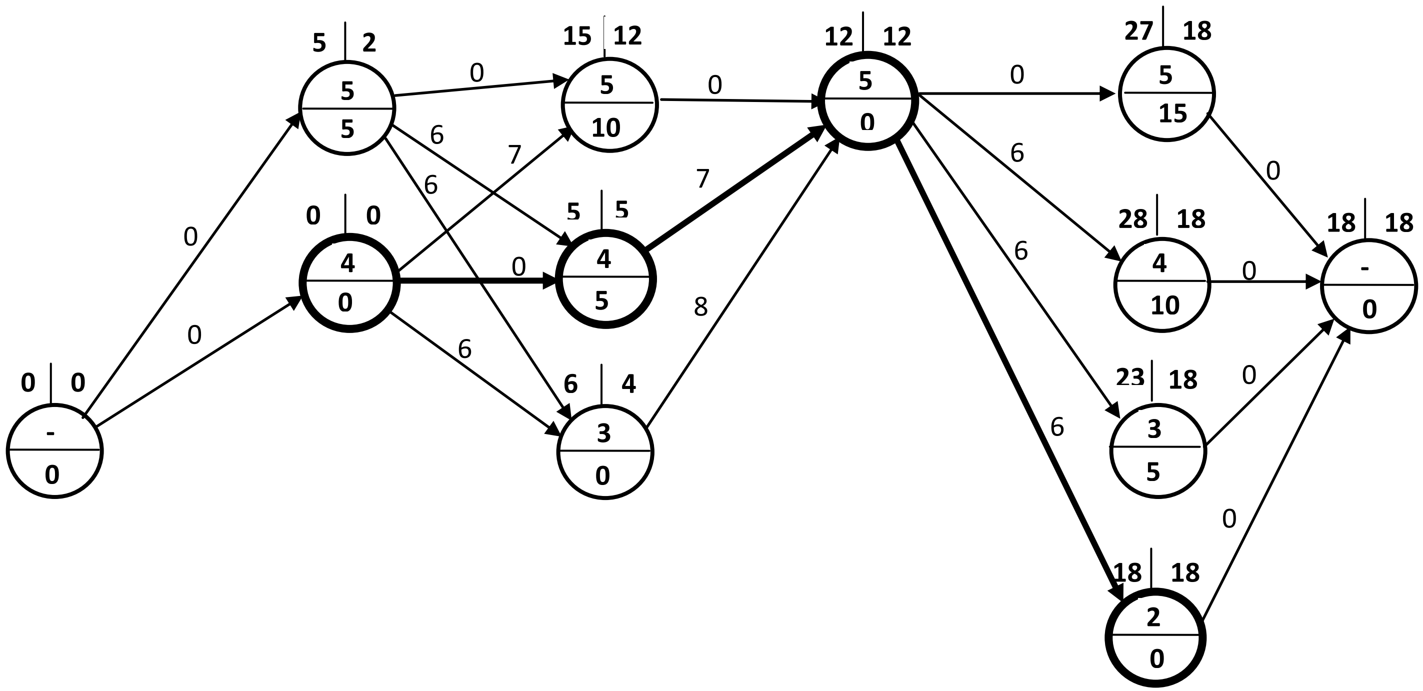
Drugi przykład wykonano dla innych poziomów zatrudnienia i zakładając, że poziom zatrudnienia przed rozpoczęciem robót jest narzucony i wynosi 0 a w obliczeniach należy uwzględnić koszt zmiany zatrudnienia wynikający z pierwszego naboru pracowników. Koszty przekroczenia zapotrzebowania i zmiany poziomu zatrudnienia przyjęto takie same jak w przykładzie nr. 1. Wszystkie obliczenia i ich wyniki zostały zaprezentowane na rys. 3.

$K1_{j+1,u} = \min(K1_{j,u} + \Theta_{j+1,u} + \Psi_{uj,uj+1}) = \min (K1_{j,u} + k_{\Theta,\Psi})$ dla wszystkich u_j

$K2_{j,u} = \max(K2_{j+1,u} - \Theta_{j+1,u} - \Psi_{uj,uj+1}) = \max (K2_{j+1,u} - k_{\Theta,\Psi})$ dla wszystkich u_{j+1}

Rysunek 2. Przykład obliczeniowy nr 1.

j=0; r_0= -	j=1; r_1=4	j=2; r_2=3	j=3; r_3=5	j=4; r_4=2	j=5; r_5= -

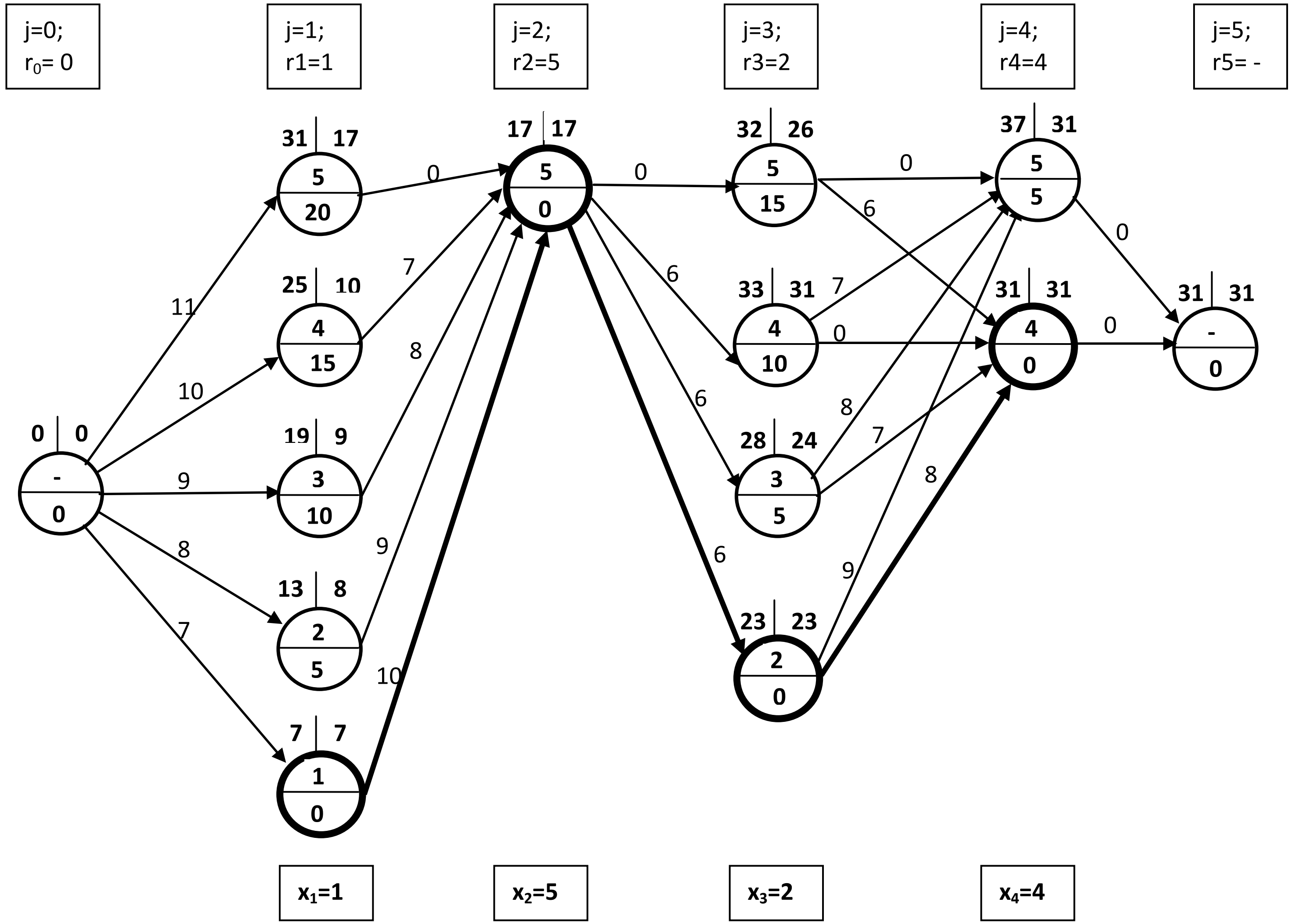


x_1=4	**x_2=4**	**x_3=5**	**x_4=2**

$K1_{j+1,u} = \min(K1_{j,u} + \Theta_{j+1,u} + \Psi_{uj,uj+1}) = \min (K1_{j,u} + k_{\Theta,\Psi})$ dla wszystkich u_j

$K2_{j,u} = \max(K2_{j+1,u} - \Theta_{j+1,u} - \Psi_{uj,uj+1}) = \max (K2_{j+1,u} - k_{\Theta,\Psi})$ dla wszystkich u_{j+1}

Rysunek 3. Przykład obliczeniowy nr 2.



Podsumowanie

Zaproponowany w artykule algorytm dotyczy optymalnego wyrównania wykresu sprawdzającego zatrudnienia ze względu na kryterium kosztowe składające się z sumy dwóch elementów: kosztu przekroczenia wymaganego zapotrzebowania oraz kosztu zmiany poziomu zatrudnienia na budowie w kolejnych okresach czasu. Takie kryterium rozwiązania zostało zaproponowane przez Jaworskiego (2004), rozszerzając tym samym tradycyjne ujęcie polegające na poszukiwaniu równomiernego zatrudnienia nie rozpatrując tego w funkcji kosztów. Zaproponowany sposób wykonania obliczeń zawiera metodykę budowy odpowiedniego grafu, przyjęcia właściwych parametrów obliczeniowych jego poszczególnych elementów, sposób wykonania obliczeń oraz wyznaczenia na ich podstawie poszukiwanych wartości optymalnych i wartości funkcji celu. Proponowany algorytm pozwala wykonać wszystkie niezbędne obliczenia na jednym rysunku, bez potrzeby rozpisywania kolejnych kroków algorytmu dynamicznego w oddzielnych tabelach dla każdego okresu obliczeniowego. Oczywiście, w przypadku konieczności stosowania obliczeń dla większego przykładu wskazane jest opracowanie specjalnego programu komputerowego, jednak przed jego użyciem warto dobrze zrozumieć mechanizm poszukiwania rozwiązania optymalnego, a do tego celu zaproponowany algorytm dobrze się nadaje.

Literatura

Benjamin J.R., Cornell C.A. (1977). Rachunek prawdopodobieństwa statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów. Wydawnictwa Naukowo – Techniczne. Warszawa.

Jaworski K.M. (2004). Podstawy organizacji budowy. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 46-51.

Korzan B. (1978). Elementy teorii grafów i sieci. Metody i zastosowania. Wydawnictwa Naukowo – Techniczne. Warszawa.

Siudak M. (1986). Badania operacyjne. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa.