Mieczysław POŁOŃSKI

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Warszawa, ul. Nowoursynowska 159

e-mail: mieczyslaw_polonski@sggw.pl

Poszukiwanie optymalnego wyrównania harmonogramu zatrudnienia metodą analityczną

Założenia

Zakładam, że dysponuję wykresem zapotrzebowania na robotników niezbędnych do pracy w kolejnych dniach, każdego dnia *j* znane jest zapotrzebowanie r_j dla $j = 1..N$, gdzie *N* to całkowita liczba dni (tygodni, miesięcy) pracy. Zakładam, że wyznaczona w obliczeniach optymalna dostępność $x_j >= r_j$, czyli że zawsze zapotrzebowanie będzie całkowicie zaspokojone, natomiast maksymalne zatrudnienie *R* równe będzie maksymalnemu zapotrzebowaniu jednego dnia w analizowanym okresie. Ponieważ analizujemy zapotrzebowanie na zasób odnawialny, przyjmuję że siła robocza nie może być magazynowana. Przyjmuję, że przed rozpoczęciem pracy na budowie występuje zatrudnienie w ilości *c* robotników (*c* >=0).

Zadanie rozwiązywać będę ze względu na kryterium kosztowe, przy czym będą brane pod uwagę dwa różne koszty: w sytuacji, gdy zatrudnienie na budowie przekracza wymagane zapotrzebowanie koszt związany z niewykorzystaniem danego środka produkcji, określony funkcją *Θ* zależną od stopnia przekroczenia wymaganego zapotrzebowania oraz koszt *Ψ* wyrażający nakłady ponoszone na zmianę poziomu zatrudnienia analizowanego zasobu, również uzależniony od wielkości zmiany zatrudnienia w kolejnych okresach czasu. Poszukiwane rozwiązanie powinno minimalizować sumę obu rozpatrywanych kosztów *Θ* i *Ψ* w całym horyzoncie planowania.

$$FC \rightarrow \min \; : \sum_{j=1}^{j=N} \Theta \;\; (x_j - r_j) + \Psi \; (x_j - x_{j-1})$$ przy ograniczeniach

$$x_j \geq r_j \;\; dla \;\; j = 1..N$$ oraz $$x_0 = c$$

Należy również zauważyć, że jeżeli chodzi o koszty przekroczenia zapotrzebowania *Θ* oraz koszty zmiany poziomu zatrudnienia *Ψ,* to są one wyrażone w postaci związku funkcyjnego, przy czym nie musi to być funkcja liniowa. Przy wyznaczaniu kosztów zmiany zatrudnienia *Ψ* można również przyjąć różne stawki w zależności do tego, czy zatrudnienie w kolejnych jednostkach rośnie czy też maleje. Zakładam również, że koszt zatrudnienia robotników *Ψ* w pierwszym dniu (koszt zmiany poziomu zatrudnienia z poziomu *c* na r_1) wynosi zero.

Metoda

Ponieważ funkcje kosztów *Θ* i *Ψ* nie muszą być liniowe do rozwiązania nie można zastosować programowania liniowego. Do rozwiązania zastosuję metodę programowania dynamicznego (PD). Metodę tę stosujemy właśnie do procesów wieloetapowych (*1..N*) z wieloma zmiennymi decyzyjnymi ($x_1..x_N$). Idea programowania dynamicznego polega na tym, że zadanie optymalizacji z *N* zmiennymi rozkłada się na *N* zadań optymalizacyjnych z jedną zmienną decyzyjną każde. Poszczególne etapy procesu wieloetapowego łączy się za pomocą zależności o charakterze rekurencyjnym. Warunkiem zastosowania PD jest, aby proces posiadał dwie cechy:

1. n- wymiarowa funkcja celu powinna posiadać postać sumy funkcji celu o jednej zmiennej decyzyjnej,
2. wartość uzyskana na j-tym etapie optymalizacji zależy wyłącznie od stanu procesu na etapie poprzednim oraz decyzji podjetej na tym właśnie, j-tym etapie, natomiast nie zależy od decyzji podjętych na etapach poprzednich. (taką własność procesu nazywamy własnością Markowa).

Do procesów decyzyjnych posiadających własność Markowa stosuje się zasadę optymalności Bellmana (Benjamin i Cornell 1977) mówiącej, że polityka optymalna ma tę własność, że niezależnie od początkowego stanu i początkowej decyzji pozostałe decyzje muszą stosować politykę optymalną ze względu na stan wynikający z pierwszej decyzji. Właśnie korzystając z tej cechy algorytm programowania dynamicznego rozkłada cały analizowany proces na etapy i poszukuje rozwiązania optymalnego przechodząc przez kolejne wyróżnione etapy, rozpoczynając od ostatniego i cofając się aż do pierwszego. Oznacza to, że aby ciąg decyzji (x_{1*}, x_{2*}, $x_{3*}\ldots$ x_{N*}) był strategią optymalną w procesie *N*-etapowym przy stanie początkowym S_0 potrzeba, aby ciąg decyzji (x_{2*}, $x_{3*}\ldots$ x_{N*}) był strategią optymalną w procesie *N-1* etapowym przy stanie wynikającym z podjęcia na pierwszym etapie decyzji x_{1*}.

Oznaczając przez *S* poszukiwane zatrudnienie w dniu poprzednim można zapisać że:

$$r_{j-1} \leq S_j \leq R = \max(r_j) \; dla \;\; j = 1..N \qquad \text{gdzie} \;\; S_j = x_{j-1}$$

Korzystając z rekurencji można zapisać

$$f_k(S) = \min \; [\, \Theta_k(x_k - r_k) + \Psi(x_k - s_k) + f_{k+1}(x_k) \,] \quad dla \; r_{k-1} \leq s_k \leq R$$

Taki sposób rozwiązania narzuca kolejność wykonywania obliczeń od końca procesu do jego początku i określony sposób notacji prowadzonych obliczeń, który nie zawsze jest czytelny, szczególnie dla osób słabiej obeznanych z badaniami operacyjnymi.

Oznaczenia:

N – liczba dni, dla których wykonywane są obliczenia,

j – numer kolejnego dnia,

k – numer rekurencyjnego kroku obliczeniowego,

r_j – zapotrzebowanie na robotników w dniu j,

S_j – poszukiwane zatrudnienie w dniu poprzednim do j,

c – poziom zatrudnienia przed rozpoczęciem prac (w dniu j=0),

R – maksymalne zatrudnienie, jakie może wystąpić na budowie; R = max(r_j) dla j=1..N,

x_j – poszukiwane zatrudnienie w dniu j,

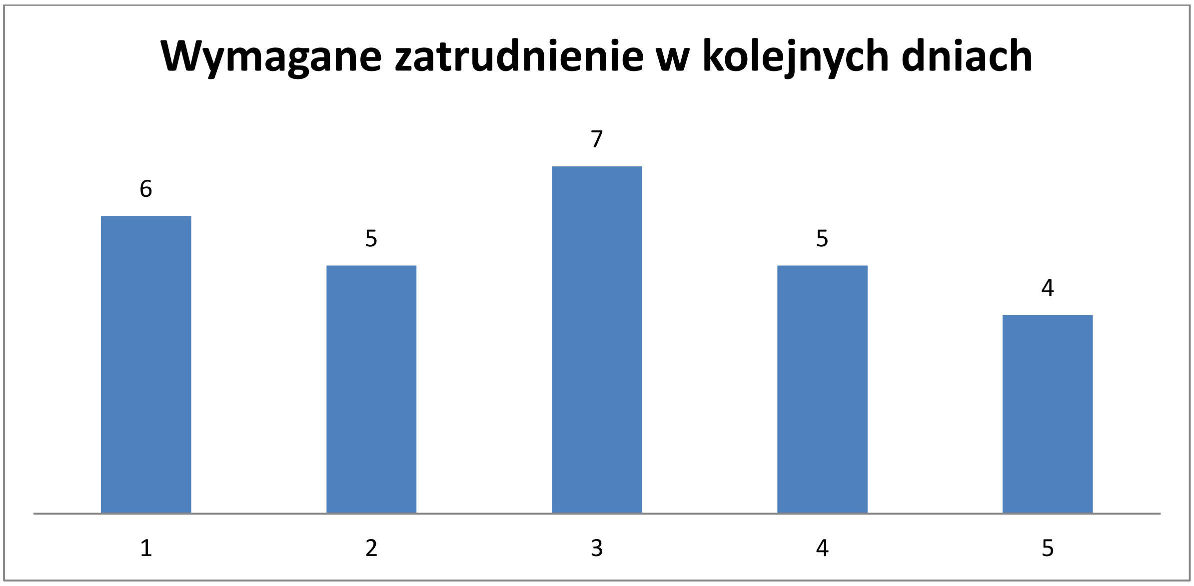
$\Theta_{j,u}$ – koszt przekroczenia wymaganego zapotrzebowania w dniu j przy poziomie zatrudnienia u,

$\Psi_{u1,u2}$ – koszt zmiany poziomu zatrudnienia z poziomu u_1 na poziom u_2,

Przykład obliczeniowy

Dane do obliczeń

Zakładam, że wymagane zapotrzebowanie w obliczanym przykładzie jest jak na rysunku poniżej.



Przyjmuję następujące koszty przekroczenia i zmiany dostępności:

Koszt przekroczenia wymaganego zapotrzebowania $\Theta_{j,x}$ został określony na 3 jednostki nakładów finansowych za przekroczenie każdej jednostki zapotrzebowania (niezależnie od wielkości przekroczenia czyli w postaci funkcji prostoliniowej).

Zmiana wielkości limitu zatrudnienia w dwóch kolejnych przedziałach czasu powoduje koszt, którego wielkość można wyrazić formułą :

$\Psi_{x1,x2}$ = 6 + (x_2 – x_1) dla $x_2 > x_1$ czyli np. dla zmiana zatrudnienia z poziomu 4 na 7 robotników kosztuje 6+(7-4)=9

$\Psi_{x1,x2}$ = 6 dla $x_2 < x_1$ (niezależnie od wielkości obniżenia zatrudnienia)

$\Psi_{x1,x2}$ = 0 dla $x_2 = x_1$

Ponieważ zakładam, że koszt zatrudnienia robotników Ψ w pierwszym dniu (koszt zmiany poziomu zatrudnienia z poziomu c na r1) wynosi zero, wielkość poziomu c nie ma znaczenia i można przyjąć dowolną wartość >=0 np. 0.

Obliczenia

Na początku obliczeń wyznaczam maksymalne zatrudnienie na budowie, które wynosi *R* = max(6,5,7,5,4)=7 . Następnie przystępuję do obliczeń dla kolejnych dni.

Dzień 5

Obliczenia rozpoczynam od ostatniego dnia tzn. *j*=5. Ponieważ jest to pierwszy krok obliczeniowy w algorytmie rekurencyjnym więc *k*=1. Minimalny poziom zatrudnienia w tym dniu wynosi r_j czyli r_5=4, natomiast maksymalny poziom został już wyznaczony i wynosi *R*=7. Aby wyznaczyć poszukiwany poziom zatrudnienia w tym dniu należy rozpatrzyć wszystkie możliwe poziomy zawarte między poziomem minimalnym i maksymalnym czyli: 4, 5, 6, i 7 czyli x_5 ε (4, 5, 6, 7). Jednocześnie trzeba rozpatrzyć wszystkie przypadki możliwego poziomu zatrudnienia w dniu poprzednim czyli S_5. W tym wypadku poprzednim dniem jest dzień 4 z zapotrzebowaniem równym 5 (r_4=5). Oznacza to, że w dniu *j*=4 mogą wystąpić następujące poziomy zatrudnienia: S_5 ε (5, 6, 7). Dalsze obliczenia dla tego dnia zostaną przeprowadzone w tabeli poniżej.

Uwaga! Zanim jednak przejdziemy do obliczeń szczegółowych warto zwrócić uwagę na samą strukturę tabeli, która w kolejnych dniach może się ciągle zmieniać. Liczba kolumn w których wpisujemy rozpatrywane *x* zawsze odpowiada wszystkim możliwym poziom zatrudnienia w danym dniu, czyli w naszym wypadku (dla piątego dnia j=5 czyli pierwszego kroku iteracji k=1) x_5 ε (4, 5, 6, 7), stąd mamy cztery kolumny. Natomiast liczba wiersz jest taka, jaka jest liczba potencjalnych poziomów zatrudnienia w dniu poprzednim (czyli w naszym przypadku 4), gdyż S_5 ε (5, 6, 7), a S_j to poszukiwane zatrudnienie w dniu poprzednim do *j* (czyli dla indeksu j=5 przy *S*, rozpatrujemy potencjalne poziomy zatrudnienia z 4 dnia).

j=5; k=1; r_5=4; r_{min}=4; R=7																
xj/S	x_5=4				x_5=5				x_5=6				x_5=7			
	Θ	*Ψ*	*FC*	*∑FC*	*Θ*	*Ψ*	*FC*	*∑FC*	*Θ*	*Ψ*	*FC*	*∑FC*	*Θ*	*Ψ*	*FC*	*∑FC*
S_5=5	0	6	6	6	3	0	3	**3**	6	7	13	13	9	8	17	17
S_5=6	0	6	6	**6**	3	6	9	9	6	0	6	6	9	7	16	16
S_5=7	0	6	6	**6**	3	6	9	9	6	6	12	12	9	0	9	9
FC z poprze-dniego dnia	0				0				0				0			

W górnym wierszu tabeli wypisano nr dnia pracy (*j*), numer kroku algorytmu (*k*), poziom zatrudnienia w dniu obliczeniowym (r_j) oraz minimalny i maksymalny poziom zatrudnienia w tym dniu (r_{min}, *R*). W pierwszej kolumnie wypisano wszystkie możliwe poziomy zatrudnienia w dniu poprzednim (*j*-1) czyli S_5=5, S_5=6 i S_5=7. Liczba tych poziomów określiła liczbę wierszy, w których zostaną wykonane obliczenia dla danego dnia. W ostatnim wierszu wypisano wartość funkcji celu dla odpowiedniego poziomu zatrudnienie *x* przeniesioną z poprzedniego dnia obliczeniowego odczytaną z właściwego poziomu *S*. Ponieważ jest to pierwszy dzień obliczeniowy wszystkie wartość tam wpisane równe są zero.

Wartości w kolumnach *Θ* i *Ψ* zostały obliczone na podstawie wartości rozpatrywanego zatrudnienia i odpowiadającego poziomu *S*. I tak np. dla x_5=6 i s_5=5 wartość *Θ* czyli koszt przekroczenia dostępności wynosi 6 ponieważ wymagane zatrudnieniu w tym dniu wynosi 4 a zakładany poziom zatrudnienia x_5 wynosi 6, czyli *Θ* = (6-4) * koszt jednostkowego przekroczenia z danych (3)= 2*3=6. Wartość *Ψ* czyli koszt zmiany poziomu zatrudnienia wynosi 7 ponieważ poziom zatrudnienia w dniu poprzednim wynosi 5 (S_5=5) a zakładany poziom zatrudnienia w danym dniu wynosi x_5=6, czyli następuje wzrost zatrudnienia o jednostkę a z danych można odczytać, że w takim przypadku koszt wynosi 7. Wartość *FC* to suma wartości w kolumnach *Θ* i *Ψ* a *∑FC* to suma *FC* oraz odpowiadającego *FC* z poprzedniego dnia odczytanego z ostatniego wiersza w danej kolumnie.

Znając wyniki obliczeń dla wszystkich rozpatrywanych poziomów zatrudnienia *x* oraz poziomów zatrudnienia w dniu poprzednim *S* należy określić, który wariant dla każdego poziomu *S* jest najkorzystniejszy. Ponieważ poszukujemy minimum funkcji celu dla każdego rozpatrywanego poziomu *S* należy wybrać minimalną wartość *∑FC*. I tak np. dla poziomu S_5=5 wybieramy z pośród wartości (6,3,13,17). Wartością minimalną jest 3 i została ona oznaczona grubą, podkreśloną czcionką. Wybrane wartości zostaną wykorzystane w kolejnym dniu obliczeniowym jako wartości *FC* z poprzedniego dnia.

Po obliczeniu wszystkich wartości w tabeli i wyznaczeniu minimalnej wartości *∑FC* dla każdego rozpatrywanego poziomu *S* można przejść do kolejnego dnia obliczeniowego.

Dzień 4

Przystępując do obliczeń dla tego dnia należy zauważyć, że występuje tylko jeden poziom S_4 ponieważ poprzedniego dnia (j=3) zapotrzebowanie jest na maksymalnym poziomie 7 robotników. Natomiast rozpatrywane w tym dniu poziomy zatrudnienia to x_4 ε (5, 6, 7), gdyż wymagane zapotrzebowanie r_4=5. Należy również zwrócić uwagę na poprawne określenie wartości *FC* z poprzedniego dnia. Odczytujemy je tabeli z poprzedniego dnia obliczeniowego (*k*-1) z odpowiednich wierszy np. wartość w kolumnie x_4=7 odczytujemy z wiersza dla S_5=7 czyli 6. Pozostałe obliczenia wykonujemy jak zostało to opisane w poprzednim dniu.

j=4; *k*=2; r_4=5; r_{min}=5; *R*=7												
xj/S	x_4=5				x_4=6				x_4=7			
	Θ	*Ψ*	*FC*	*∑FC*	*Θ*	*Ψ*	*FC*	*∑FC*	*Θ*	*Ψ*	*FC*	*∑FC*
S_4=7	0	6	6	***<u>9</u>***	3	6	9	15	6	0	6	12
FC z poprzedniego dnia	3				6				6			

Poniżej podano wyniki obliczeń dla wszystkich pozostałych dni obliczeniowych.

Dzień 3

j=3; *k*=3; r_3=7; r_{min}=7; *R*=7				
xj/S	x_3=7			
	Θ	*Ψ*	*FC*	*∑FC*
S_3=5	0	8	8	***<u>17</u>***
S_3=6	0	7	7	***<u>16</u>***
S_3=7	0	0	0	***<u>9</u>***
FC z poprzedniego dnia	9			

Dzień 2

j=2; *k*=4; r_2=5; r_{min}=5; *R*=7												
xj/S	x_2=5				x_2=6				x_2=7			
	Θ	*Ψ*	*FC*	*∑FC*	*Θ*	*Ψ*	*FC*	*∑FC*	*Θ*	*Ψ*	*FC*	*∑FC*
S_2=6	0	6	6	23	3	0	3	***<u>19</u>***	6	7	13	22
S_2=7	0	6	6	23	3	6	9	25	6	0	6	***<u>15</u>***
FC z poprzedniego dnia	17				16				9			

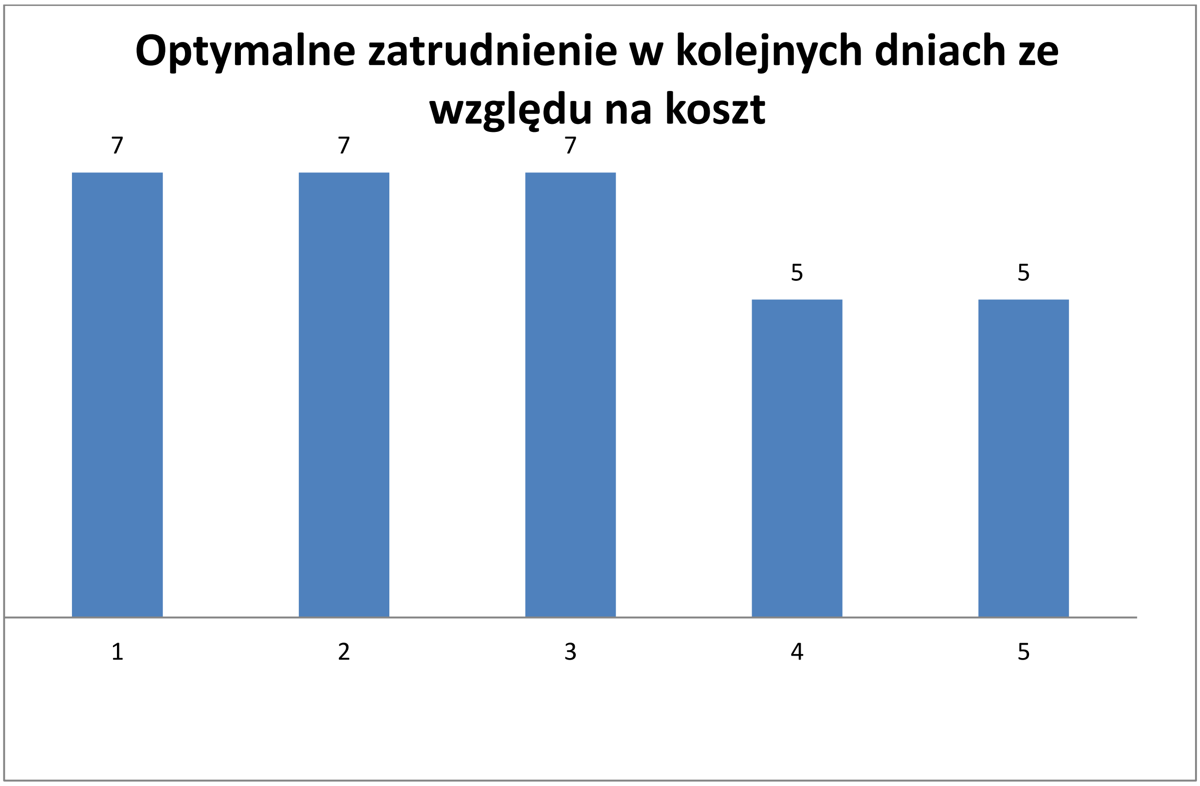
Dzień 1

j=1; *k*=5; r_1=6; r_{min}=6; *R*=7								
xj/S	x_1=6				x_1=7			
	Θ	*Ψ*	*FC*	*∑FC*	*Θ*	*Ψ*	*FC*	*∑FC*
S_1=*c*	0	0	0	19	3	0	3	***<u>18</u>***
FC z poprzedniego dnia	19				15			

Wyznaczenie rozwiązania optymalnego

Wyznaczenie optymalnego rozwiązania rozpoczyna się od ostatniego dnia obliczeniowego (k=5). Ponieważ zawsze będzie tam tylko jeden wiersz (S_1=c) z niego odczytujemy optymalne zatrudnienie w pierwszym dniu. Wyznacza je oznaczona wcześniej, minimalna wartość $\sum FC$, w tym wypadku wartość 18. Jest to całkowity koszt zatrudnienia robotników wg rozwiązania optymalnego minimalizujący funkcję celu. Z kolumny w której stoi minimalna wartość $\sum FC$ można odczytać, że została ona wyznaczona przy poziomie zatrudnienia równym 7. W takim razie z tabeli dla poprzedniego (czwartego) dnia obliczeniowego z wiersza S_2=7 można odczytać, że minimalna wartość $\sum FC$ w tym wierszu znajduje się w kolumnie x_2=7. Z kolei przechodząc do dnia trzeciego z wiersza S_3=7 odczytujemy, że x_3=7. W tabeli z dnia drugiego w wierszu s_4=7 odnajdujemy, że x_4=5. Ostatnią poszukiwaną wartość optymalnego zatrudnienia odczytujemy z tabeli dla pierwszego dnia obliczeniowego (k=1) w wierszu S_5=5. Poszukiwane zatrudnienie w tym dniu wynosi 5.

Ostatecznie wyznaczono następujące, optymalne zatrudnienie na budowie w kolejnych dniach realizacji robót: 7, 7, 7, 5, 5. Całkowity minimalny koszt zatrudnienia przy przyjętych stawkach funkcji Θ i Ψ wynosi 18.



Literatura

Benjamin J.R., Cornell C.A. (1977). Rachunek prawdopodobieństwa statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów. Wydawnictwa Naukowo – Techniczne. Warszawa.

Jaworski K.M. (2004). Podstawy organizacji budowy. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, Korzan B. (1978). Elementy teorii grafów i sieci. Metody i zastosowania. Wydawnictwa Naukowo – Techniczne. Warszawa.

Siudak M. (1986). Badania operacyjne. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa.